№ 4 дәріс

Функция шегі

Нүктедегі функция шегінің Гейне және Коши анықтамалары. Бұл анықтамалардың тең мағыналылығы.

Айталық, R нақты сандар жиынының белгілі бір *E* ішжиынында анықталған $f: E \to \mathrm{R}$ функциясы берілген, ал a осы *E* жиынының шектік нүктесі болсын. Демек, a нүктесінің кез-келген $(a-\delta, a+\delta)$ маңайында (δ-маңайында) *E* жиынының шексіз көп нүктелері жатады, бірақ a нүктесі *E* жиынында жатпауы да мүмкін.

Функция шегінің Коши анықтамасы. *b*саны x a-ға ұмтылғанда $f: E \to \mathrm{R}$ функциясының шегі деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon)$ оң саны табылып,

$$0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \tag{1}$$

шартын қанағаттандыратын барлық $x \in \mathrm{E}$ үшін

$$|f(x) - b| < \varepsilon \tag{2}$$

теңсіздігі орындалса.

Егер осы шарттар орындалса, онда оны былай жазады:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b; \quad \lim_{x\to a, x\in E} f(x) = b; \quad \lim_{\mathrm{E}\ni x\to a} f(x) = b; \quad f(x) \to b,\ x \to a,\ x \in \mathrm{E}$$

Бұл анықтаманы логикалық символика арқылы былай жазуға болады:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b := \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \mathrm{E}(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\cdot$$

Егер x-ті a-ға ұмтылдырғанда $f(x)$ функциясы b-ға ұмтылмайтын болса, яғни $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$ болса, онда белгілі бір ε оң саны үшін кез-келген δ оң саны арқылы $0 < |x-a| < \delta$ және $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын $x \in \mathrm{E}$ саны табылар еді. Бұны кванторлар тілінде былай жазады:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq b := \exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0\ \exists x \in \mathrm{E}((0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geq \varepsilon)).$$

Шектің бұл Коши анықтамасын кейде функция шегінің "$\varepsilon - \delta$" тіліндегі анықтамасы деп те атайды.

Енді осы анықтамаға эквивалентті функция шегінің тізбектер тіліндегі Гейне анықтамасын келтірейік.

Функция шегінің Гейне анықтамасы. *b* саны x a-ға ұмтылғанда $f: E \to \mathrm{R}$ функциясының шегі деп аталады, егер a санына жинақталатын кез-келген $\{x_n\} \subset \mathrm{E}(x_n \neq a)$ тізбегіне сәйкес функция мәндерінің $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақталса.

Коши және Гейне анықтамаларының эквиваленттілігі. Айталық, b саны $f: E \to \mathrm{R}$ функциясының x a-ға ұмтылғандағы Коши анықтамасы бойынша шегі болсын. Онда $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathrm{E}((0 <$

$$x - a < \delta) \Rightarrow (f(x) - b < \varepsilon)).$$

Енді $\{x_n\} \subset E(x_n \neq a)$ кез-келген a-ға ұмтылатын сандық тізбек болсын. Онда тізбек шегі анықтамасынан $\delta = \delta(\varepsilon)$ үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N$ үшін $0 < |x_n - a| < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігі орындалады. Ал $|f(x) - b| < \varepsilon$ шартынан $\{f(x_n)\}$ тізбегі үшін $n > N$ болғанда $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни $f(x_n) \to b$.

Сонымен, b саны x a-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының Гейне анықтамасы бойынша шегі болады.

Енді b саны $f(x)$ функциясының x-тің a-ға ұмтылғандағы Гейне мағынасындағы шегі болсын. Сонда b санының $f(x)$ функциясының Коши анықтамасы мағынасындағы шегі екенін көрсетейік. Керісінше, b саны x a-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының Коши анықтамасы мағынасындағы шегі емес деп ұйғарайық, яғни

$$\exists\varepsilon > 0 \forall\delta > 0 \exists x \in E((0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geq \varepsilon)\ .$$

Енді нөлге жинақталатын $\{\delta_n\}$, $(\delta_n > 0)$, тізбегін алайық. Онда $\exists\varepsilon > 0 \forall\delta_n > 0 \exists x_n \in E\ (0 < |x_n - a| < \delta_n) \wedge (|f(x_n) - b| \geq \varepsilon)$. Демек, $0 < |x_n - a| < \delta_n$ теңсіздігінен x_n тізбегінің а-ға жинақталатынын көреміз, өйткені $\delta_n \to 0$,ал $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$ теңсіздігінен $\{f(x_n)\}$ тізбегі b санына жинақталмайды. Бұл bсанының ха-ға ұмтылғанда $f : E \to R$ функциясының, Гейне анықтамасы бойынша, шегі болатынына қайшылық. Эквиваленттік дәлелденді.

Бірнеше мысал келтірейік.

1. $f(x) = c$ - тұрақты функциясының а-ға ұмтылғандағы шегі

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c \tag{3}$$

екенін көрсетейік.

Шынында да , $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)$, мысалы, $\forall\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) = 1$ десек болғаны. Онда

$$\forall x (0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) = 1 \Rightarrow |f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon)\ .$$

2. Егер $a > 0$ болса, онда $\forall x_0 \in R$ үшін a^x көрсеткіштік функциясының $x \to x_0$ ұмтылғандағы шегі a^{x_0} екенін, яғни

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \tag{4}$$

болатынын көрсетейік.

Алдымен $a > 1$ жағдайын қарастырайық. Онда $0 < x < 1$ тенсіздігін қанағаттандыратын х үшін Бернулли теңсіздігі көмегімен алынатын

$$0 < a^x - 1 < 2(a - 1)x \tag{5}$$

теңсіздігі орындалады. Шынында да, Бернулли теңсіздігі бойынша $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n}$. Сондықтан, $\frac{1}{n + 1} < x \leq \frac{1}{n}$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын x үшін

$$a^x - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a - 1}{n} = (\frac{1}{n} + 1)(a - 1)\frac{1}{n + 1} < 2(a - 1)x$$

$n \qquad n \qquad n+1$

Егер $-1 < x < 0$ болса, онда

$$\left|a^{x}-1\right| = 1 - a^{x} = 1 - \frac{1}{a^{-x}} = \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}} < a^{-x} - 1 < 2(a-1)\left|x\right|.$$

Демек, $a > 1$ және $0 < |x| < 1$ үшін

$$\left|a^{x}-1\right| < 2(a-1)\left|x\right|. \qquad (6)$$

Енді (4) теңдікті дәлелдейік. Ол үшін $\left|a^{x}-a^{x_0}\right|$ айырымын былай түрлендіріп, жазайық

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0} - 1| \cdot a^{x_0} < a^{x_0} \cdot 2(a-1)|x - x_0| .$$

Егер $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2a^{x_0}(a-1)}, 1\right\}$ деп алсақ, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ болғанда, жоғарыдағы теңсіздіктен

$$|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$$

теңсіздігін аламыз, яғни (4) теңдік $a > 1$ жағдайында дәлеледенді.

Енді $0 < a < 1$ болса, онда жоғарыдағы теңсіздіктерде a орнына $\frac{1}{a}$ қойса болғаны, өйткені онда $\frac{1}{a} > 1$. Сонымен, $0 < a < 1$ болғанда, $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2a^{-x_0}(a^{-1}-1)}, 1\right\}$.

3. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x \in E = R/0$, функциясының шегі x нөлге ұмтылғанда нөлге тең екенін көрсетейік, яғни

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

Шынында да, $\left|x\sin\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x| < \varepsilon$, егер $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ болса.

Бұл мысалда функцияның анықталмаған нүктеде де шегінің бар болатынын көреміз, бұл шындығында шек анықтамасында ескерілген, өйткені $0 < |x - a|$ болуы керек.

Өзіндік маңызы бар тағы бір мысал келтірейік.

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x \ne a \text{ болса,} \\ c, & \text{егер } x = a \text{ болса} \end{cases}$

функциясының шегі $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, өйткені

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) = 1 \text{ және } 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) = 1 \Rightarrow |f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon .$$

Бұл мысалдан функцияның нүктедегі мәні мен сол нүктедегі шегі тең бола бермейтінін көреміз.

a нүктесінің маңайынан a нүктесінің өзін алып тастағанда пайда болатын маңайды a нүктесінің ойылған маңайы деп атайды. Егер $U^{\delta}(a)$ арқылы a нүктесінің δ маңайын белгілесек, онда ойылған δ маңайын $\overset{\circ}{U}{}^{\delta}(a)$ арқылы белгілейміз.

E

Сонымен, $U_E^{\delta}(a) := E \cap U^{\delta}(a)$, $\overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a) := E \cap \overset{\circ}{U}{}^{\delta}(a)$ жиындарын a нүктесінің E жиындағы сәйкес δ маңайы және δ ойылған маңайы деп айтамыз.

Жиынның шектік нүктесінің ойылған маңайының мынадай айқын екі қасиетін атап өтеміз:

1) ойылған маңай бос емес, яғни $\overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a) \neq \varnothing$;

2) кез-келген екі ойылған маңай қиылысуында ойылған маңай бар, яғни

$$\forall \overset{\circ}{U}{}'_E(a)\ \forall \overset{\circ}{U}{}''_E(a) \exists \overset{\circ}{U}(a) \left(\overset{\circ}{U}(a) \subset \overset{\circ}{U}{}'_E(a) \cap \overset{\circ}{U}{}''_E(a) \right).$$

Егер bнүктесінің R жиынындағы ε маңайын $V_R^{\varepsilon}(b)$ арқылы белгілесек, онда функция шегінің "$\varepsilon-\delta$" тіліндегі Коши анықтамасын мына түрде жазуға болады:

$$\lim_{E \ni x \to a} f(x) = b := \forall V_R^{\varepsilon}(b)\exists \overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a)(f(\overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a)) \subset V_R^{\varepsilon}(b)).$$

Бұдан егер b нүктесінің кез-келген ε маңайы $V_R^{\varepsilon}(b)$ үшін $f: E \to R$ бейнелеуінің $f(\overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a))$ бейнесі толығымен $V_R^{\varepsilon}(b)$ маңайында жататын a нүктесінің Е жиынында ойылған δ маңайы $\overset{\circ}{U}{}_E^{\delta}(a)$ табылса, онда b саны x a-ға Е бойынша ұмтылғанда $f: E \to R$ функциясының шегі болады.

Сандық өстің кез-келген нүктесі маңайында әрқашан симметриялы маңай жататын болғандықтан функция шегінің анықтамасын мына түрде жазамыз:

$$\lim_{E \ni x \to a} f(x) = b := \forall V_R(b)\exists \overset{\circ}{U}_E(a)(f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V_R(b)) \tag{7}$$

Жоғарыда келтірілген анықтамалардың барлығы өзара эквивалентті және әртүрлі функциялардың шегін есептеуде біресе біреуін, біресе басқа біреуін қолданған ыңғайлы болады. Мысалы, $f(x)$ функциясының b санынан ауытқуы белгілі бір шамадан аспауы үшін x -тің a -дан ауытқуын көрсететін сандық бағалауларда "$\varepsilon-\delta$" тіліндегі анықтама ыңғайлы да, ал сандық жиындарда анықталмаған жалпы функциялар шегі үшін (7) анықтама ыңғайлырақ.

5. Бүкіл сан өсінде анықталған

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

сигнум икс функциясының x нөлге ұмтылғандағы шегі жоқ. Оны көрсету үшін алдымен (7) анықтаманың керілеуін келтірейік:

$$\forall b \in R \exists V(b) \forall \overset{\circ}{U}(a) \exists x \in \overset{\circ}{U}(a)\ (f(x) \notin V(b)). \tag{8}$$

Бұл (8) анықтаманы біздің мысалға қолданғанда

$$\forall b \in R \exists V(b) \forall \overset{\circ}{U}(0) \exists x \in \overset{\circ}{U}(0) \quad (signx \notin V(b))$$

болар еді, яғни x нөлге ұмтылғандағы $\operatorname{sgn} x$ функциясының шегі болады дейтін b санын алсақ, онда b белгілі бір маңайы үшін 0 нүктесінің кез-келген ойылған маңайынан $\operatorname{sign} x \notin V(b)$ болатын x табылады.

Шынында да, $\operatorname{sgn} x$ мәні болатын – 1, 0, 1 сандарының бірде бірі x нөлге ұмтылғанда оның шегі бола алмайды, өйткені осы сандарды ұстамайтын b санының $V(b)$ маңайы бар, ал егер b саны осы үш санның -1 немесе 1-ге тең болса, онда $\varepsilon = \frac{1}{2}$ - деп b нүктесінің $V(b)$ маңайын алсақ, мұндай маңайға –1 және 1 нүктелерінің екеуі бірдей жатпайды. Сондай ақ, егер $b=0$ болса, онда 0 нүктесінің $U(0)$ маңайында

$f(x)=1$ және $f(x)=-1$ болатын x нүктесі бар, демек, $\exists x \in \overset{\circ}{U}(0) \quad (f(x) \notin V(b))$.

6. 4-мысалдағыдай, $|\operatorname{sgn} 0| = 0$ болғанымен, ол мәннің функция аргументінің осы нүктеге ұмтылғанымен шегінің мәніне ешқандай қатысының жоқ екенін көрсететін мына шекті $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{sgn} x| = 1$ дәлелдейік.

Шынында да, $x \in R|0$ болса, онда $|\operatorname{sgn} x| = 1$, яғни бұл функция 0 нүктесінің кез-келген $\overset{\circ}{U}(0)$ ойылған маңайында 1-ге тең. Демек, 1 нүктесінің кез-келген $V(1)$ маңайы үшін

$$f(\overset{\circ}{U}(0)) = 1 \in V(1).$$

Функция шегінің жоғарыдағы анықтамаларында a нүктесінің E жиынының шектік нүктесі болсын дегеннен басқа шарт қойылған жоқ. Енді $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ шегінің анықтамасында қосымша $x > a$ немесе $x < a$ шарттарын енгізсек, онда сәйкес оң немесе сол жақты деп аталатын бір жақты шек анықтамаларын енгізуге болады.

Біз $(a, a+\delta)$ және $(a-\delta, a)$ интервалдарын а нүктесінің сәйкес оң және сол жақ ойылған δ маңайы деп атап, сәйкес $\overset{\circ}{U}(a+0)$ және $\overset{\circ}{U}(a-0)$ арқылы белгілейміз.

Сонда $\overset{\circ}{U}_E(a+0) := E \cap \overset{\circ}{U}(a+0)$, $\overset{\circ}{U}_E(a-0) := E \cap \overset{\circ}{U}(a-0)$ жиындарын a нүктесінің E жиындағы ойылған оң жақ, сол жақ маңайы деп атаймыз. Сонымен бірге a нүктесі E жиынының шектік нүктесі болуы қажет, яғни $\overset{\circ}{U}_E(a \pm 0) \neq \varnothing$.

Біржақты шектің анықтамасын былай айтуға болады. Айталық a нүктесі E жиынының бір жақты шектік нүктесі болсын. Онда

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b := \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a+0) \ \ (f(x) \in V^{\varepsilon}_R(b)),$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b := \forall\varepsilon > 0 \exists\delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a-0) \ \ (f(x) \in V^{\varepsilon}_R(b)). \tag{9}$$

Сонымен, оң жақ шек үшін $b = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, ал сол жақ шек үшін $b = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ белгілеулерін қолданады.

1-теорема. $f : E \to \mathrm{R}$ функциясының $E \ni x \to a$ ұмтылғанда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ шегі бар сонда және тек сонда, егер $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ оң жақ, сол жақ шектері бар және тең болса.

Қажеттілігі. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ шегі бар болса, онда (1) анықтаманы (9) анықтамамен салыстырып, оның $x \to a$ ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының оң жақ та сол жақ та шегі екенін көреміз.

Жеткіліктілігі. Ортақ мәні b болатын бірі біріне тең оң жақ, сол жақ шектері бар болсын. Онда (9) анықтамадан $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \mathring{U}_E^{\delta} (f(x) \in V_R^{\varepsilon}(b)).$ Ал бұл (7) анықтама бойынша $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ екенін көрсетеді. Теорема дәлелденді.

7. $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$ шектерінің бар екенін көрсетейік. Мұнда $a = 0$ нүктесі $\operatorname{sgn} x$ функциясы анықталған R жиынының оң және сол жақтық шектік нүктесі. Кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta(\varepsilon) = 1$ болсын. Онда $\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)$ үшін $\operatorname{sgn} x = 1$ болғандықтан $\forall x \in \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)$ үшін $f\left(\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_{R_+}(0+0)\right) \subset V^{\varepsilon}_{R}(1)$. Демек, $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x = 1$. Дәл осылай екінші шекте дәлелденеді.

Біз 5-мысалда бұл функцияның x нөлге ұмтылғанда шегінің жоқ екенін көрсеткенбіз.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ шегі жоқ. Шынында да, 0 нүктесінің кез-келген $\overset{\circ}{U}(0)$ маңайында $\dfrac{1}{\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $n \in N$, түріндегі нүктелер бар және ол нүктелерде функция мәні сәйкес -1 және 1. Бірақ $0 < \varepsilon < 1$ болса, бұл екі сан да функция шегі деп алған $b \in R$ нүктесінің $V(b)$ маңайында бірге жатпайды. Демек, бірде бір $b \in R$ саны бұл функцияның x нөлге ұмтылғанда шегі бола алмайды.

9. 7-мысалдағыдай

$$E_- = \left\{ x \in R \;\middle|\; x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} - 2\pi n}, n \in N \right\}, \quad E_+ = \left\{ x \in R \;\middle|\; x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n \in N \right\}$$

жиындары бойынша x нөлге ұмтылғанда $\sin \frac{1}{x}$ функциясының шектері бар, яғни

$$\lim_{E_- \ni x \to 0-0} \sin \frac{1}{x} = -1, \qquad \lim_{E_+ \ni x \to 0+0} \sin \frac{1}{x} = 1.$$

10. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ функциясы $x \neq 0$ болатын нүктелерде анықталған,

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Егер E жиыны жоғарыдан шектелмесе, онда $+\infty$ нүктесі оның шектік нүктесі болады деп түсінеміз. Мұны дәлірек былай анықтауға болады. Егер кез-келген $K > 0$ саны үшін $+\infty$ нүктесінің маңайы болып табылатын $(K, +\infty)$ интервалында Е жиынының ең болмағанда бір нүктесі бар болса, яғни $E \cap U^{K}_{R}(+\infty) \equiv E \cap (K, +\infty) \neq \varnothing$ болса, онда $+\infty$ нүктесі Е жиынының шектік нүктесі деп аталады. Егер $\forall K > 0$ саны үшін $E \cap U_R^K(-\infty) \equiv E \cap (-\infty, -K) \neq \varnothing$ болса, онда $-\infty$ нүктесі E жиынының шектік нүктесі деп аталады. $+\infty$ нүктесі E жиынының шектік нүктесі болған жағдайда x осы $+\infty$ нүктесіне ұмтылғанда $f : E \to R$ функциясының шегі b санына тең деп айтамыз, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $x > K$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $x \in E$ үшін $|f(x) - b| < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $K > 0$ саны табылса, яғни кванторлар тілінде

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b := \forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 \ \forall x \in E, x > K \left(|f(x) - b| < \varepsilon \right).$$

Дәл осылай

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b := \forall\varepsilon>0\,\exists K>0\,\forall x\in E,\ x<-K\,(\,|f(x)-b|<\varepsilon\,),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b := \forall\varepsilon>0\,\exists K>0\,\forall x\in E,\ |x|>K\,(\,|f(x)-b|<\varepsilon),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty := \forall \mathrm{M}\in \mathrm{R}\,\exists K\in R\,\forall x\in E,\ x>K\,(\,f(x)<M\,),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty := \forall \mathrm{M}\in \mathrm{R}\,\exists K\in R\,\forall x\in E,\ x<K\,(M<f(x)),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty := \forall \mathrm{M}\in \mathrm{R}\,\exists K\in R\,\forall x\in E,\ |x|>K\,(\,f(x)<M\,),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty := \forall \mathrm{M}\in \mathrm{R}\,\exists K\in R\,\forall x\in E,\ x<K\,(M<|f(x)|),$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty := \forall \mathrm{M}\in \mathrm{R}\,\exists K\in R\,\forall x\in E,\ |x|>K\,(\,|f(x)|>M\,),$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty := \forall K>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in \mathrm{E}\big(0<|x-a|<\delta\big)\Rightarrow f(x)>K,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty := \forall K>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in \mathrm{E}\big(0<|x-a|<\delta\big)\Rightarrow f(x)<-K,$$

және т.с.с.

$> \varepsilon$ $\quad f(x'_{n_k})-f(x'_n)\quad)\geq\varepsilon$

теңсіздігінен . Бұл қайшылық теореманы